回路システム学第二(6)

2019.5.27

担当教官　山尾 泰

先週の学習項目

1．　回路網関数（２）

（１）複素周波数解析での過渡応答

（2）複素周波数解析での定常応答

伝達関数と定常応答

引き続き図1の回路で定常応答（強制応答）について調べよう

$$V(s)=\frac{2\rho\omega_i s}{(s^2+\omega_i^2)(s^2+2\rho s+\omega_0^2)}=\frac{K_1}{s^2+\omega_i^2}+\frac{K_2}{s^2+2\rho s+\omega_0^2}$$

ただし $\rho=\frac{1}{2RC},\quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

入力信号による強制応答項 $V_f(s)$

回路固有の過渡応答項 $V_n(s)$

$V_f(s)$ について調べよう

分母の根（極）が共役複素数 $s_{1,2}=\pm j\omega_i$ となることから、この時間応答は

$$\boxed{v_f(t)=2\left(A_R\cos\omega_i t+A_I\sin\omega_i t\right)}$$

となる

係数 A_R, A_I は極 $s_{1,2}$ に対する $V(s)$ の留数$\alpha_{1,2}$の実部、虚部である

留数定理を用いて K_1 K_2 ･･･ を求める

留数と留数定理

分母がN次の有理式(sは複素数)が以下のように部分分数分解できる場合

$$Y(s) = \frac{1}{(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_N)}$$

$$Y(s) = \frac{b_1}{(s+a_1)} + \frac{b_2}{(s+a_2)} + \cdots + \frac{b_N}{(s+a_N)}$$

b_1, b_2, ･･･, b_Nを**留数**という

留数とY(s)の間には以下の関係がある(**留数定理**)

$$\lim_{s \to -a_n} (s+a_n) Y(s) = b_n$$

（続き）

$$V(s)=\frac{\alpha_1}{(s+j\omega_i)}+\frac{\alpha_2}{(s-j\omega_i)}+\frac{K_2}{s^2+2\rho s+\omega_0{}^2}$$

$V(s)$ の留数$\alpha_{1,2}$ は

$$\alpha_1=\lim_{s\to -j\omega_i}\frac{2\rho\omega_i s}{(s-j\omega_i)(s^2+2\rho s+\omega_0{}^2)}=\frac{\rho\omega_i}{(\omega_0{}^2-\omega_i{}^2)-2j\rho\omega_i}$$

$$=\frac{\rho\omega_i(\omega_0{}^2-\omega_i{}^2)+j2\rho^2\omega_i{}^2}{(\omega_0{}^2-\omega_i{}^2)^2+4\rho^2\omega_i{}^2}$$

$$\alpha_2=\lim_{s\to j\omega_i}\frac{2\rho\omega_i s}{(s+j\omega_i)(s^2+2\rho s+\omega_0{}^2)}=\frac{\rho\omega_i}{(\omega_0{}^2-\omega_i{}^2)+j2\rho\omega_i}$$

$$=\frac{\rho\omega_i(\omega_0{}^2-\omega_i{}^2)-j2\rho^2\omega_i{}^2}{(\omega_0{}^2-\omega_i{}^2)^2+4\rho^2\omega_i{}^2}$$

（続き）

$$\therefore \begin{cases} A_R = \mathrm{Re}\left[\alpha_{1,2}\right] = \dfrac{\rho\omega_i(\omega_0{}^2 - \omega_i{}^2)}{(\omega_0{}^2 - \omega_i{}^2)^2 + 4\rho^2\omega_i{}^2} \\ A_I = \mathrm{Im}\left[\alpha_{1,2}\right] = \dfrac{\pm 2\rho^2\omega_i{}^2}{(\omega_0{}^2 - \omega_i{}^2)^2 + 4\rho^2\omega_i{}^2} \end{cases}$$

入力信号による
定常応答は

$$v_f(t) = 2\left(A_R \cos\omega_i t + A_I \sin\omega_i t\right)$$
$$= A\sin\left(\omega_i t + \phi\right) \quad \text{［極座標表示］}$$

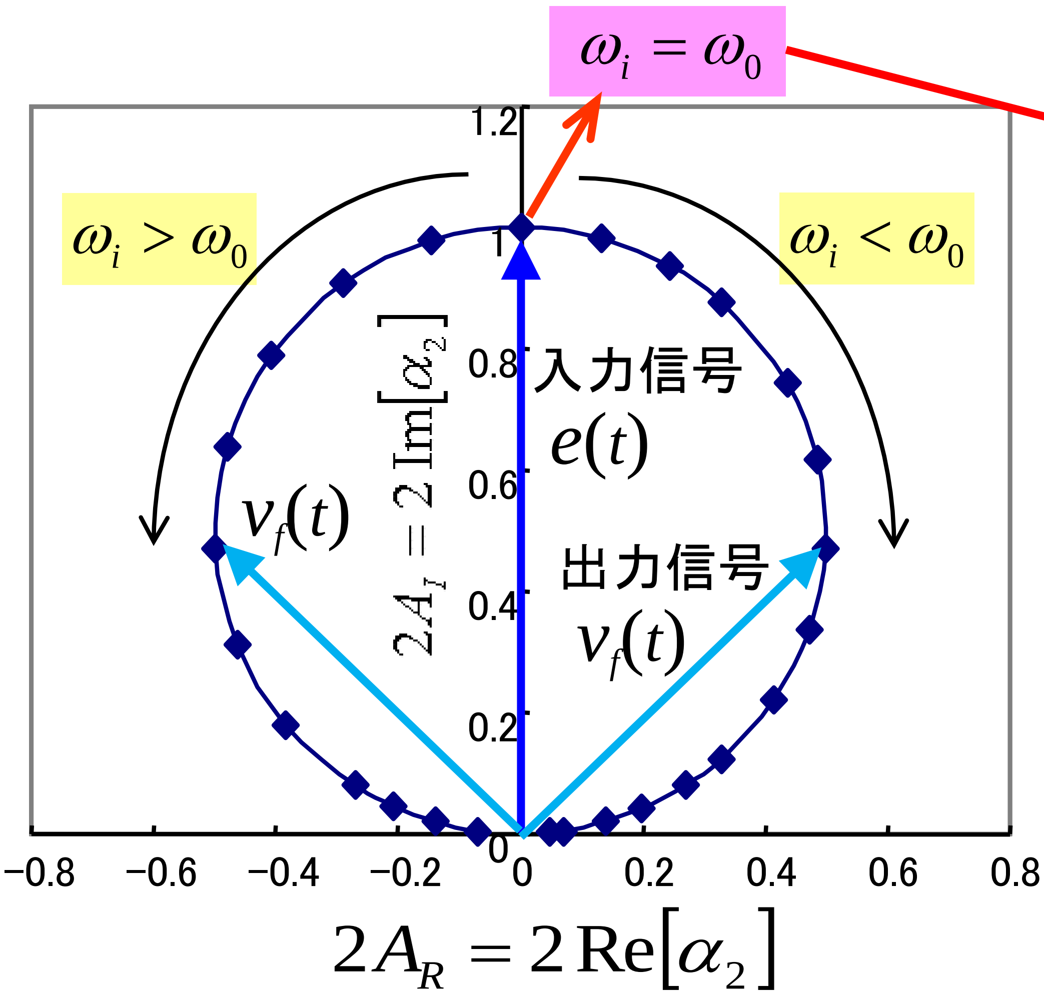
$$A = 2\sqrt{A_R{}^2 + A_I{}^2} = \frac{2\rho\omega_i}{\sqrt{4\rho^2\omega_i{}^2 + \left(\omega_0{}^2 - \omega_i{}^2\right)^2}}$$

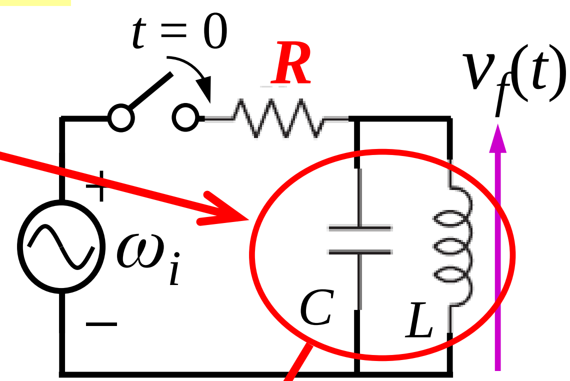
$$\phi = \tan^{-1}\left(A_R / A_I\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0{}^2 - \omega_i{}^2}{2\rho\omega_i}\right)$$

$\rho = 1$ とおいて
$\left(2A_R, 2A_I\right)$ 平面で
振幅と位相を見てみよう

図1の回路の定常応答の角周波数特性(1)

ω_i に対する $v_f(t)$ のベクトル軌跡をフェーザ表示すると、



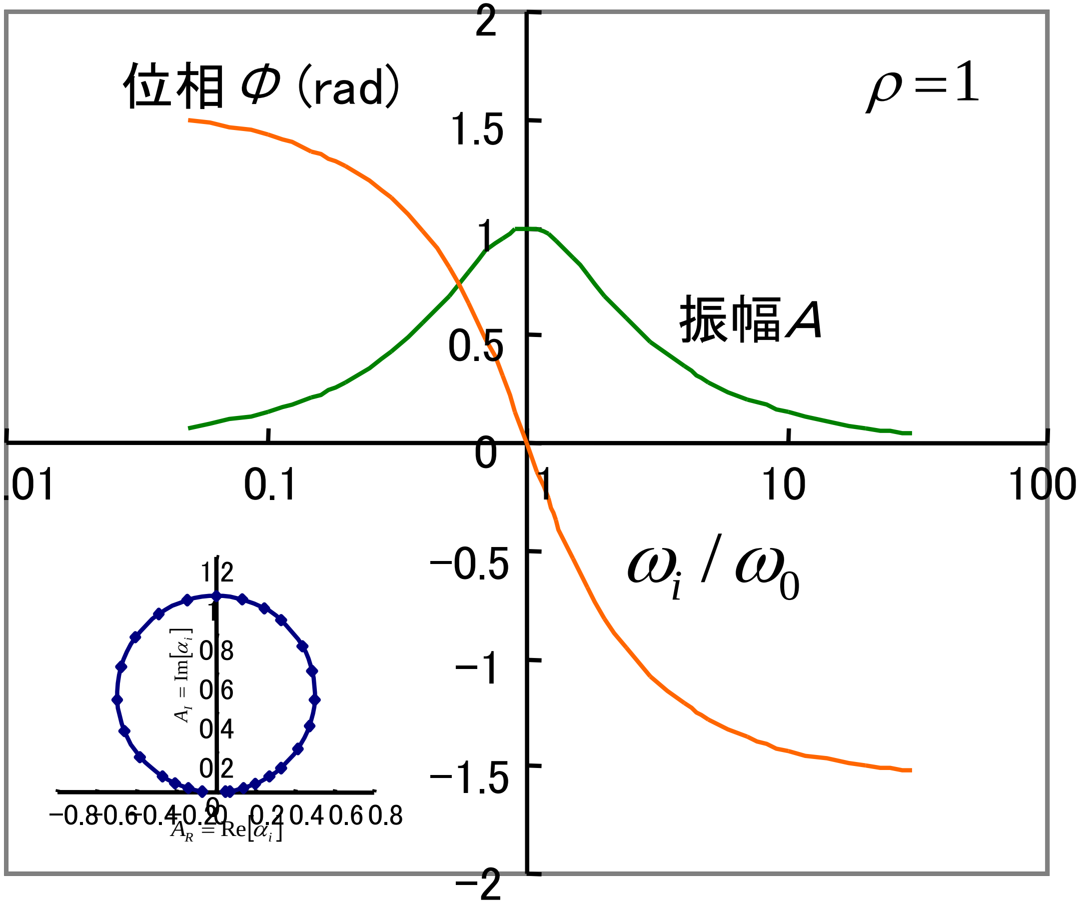


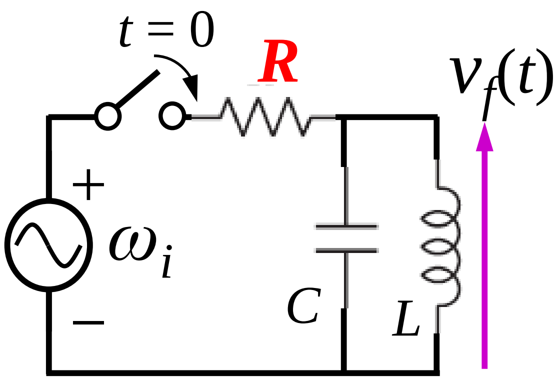
並列共振角周波数ω_0では、CとLの合成インピーダンスが∞となり、電圧伝達関数＝1

それ以外の角周波数では、入力振幅が減衰し、リアクタンス分により位相が回転する

図1の回路の定常応答の角周波数特性(2)

ω_i に対する $v_f(t)$ の振幅と位相をそれぞれプロットすると、





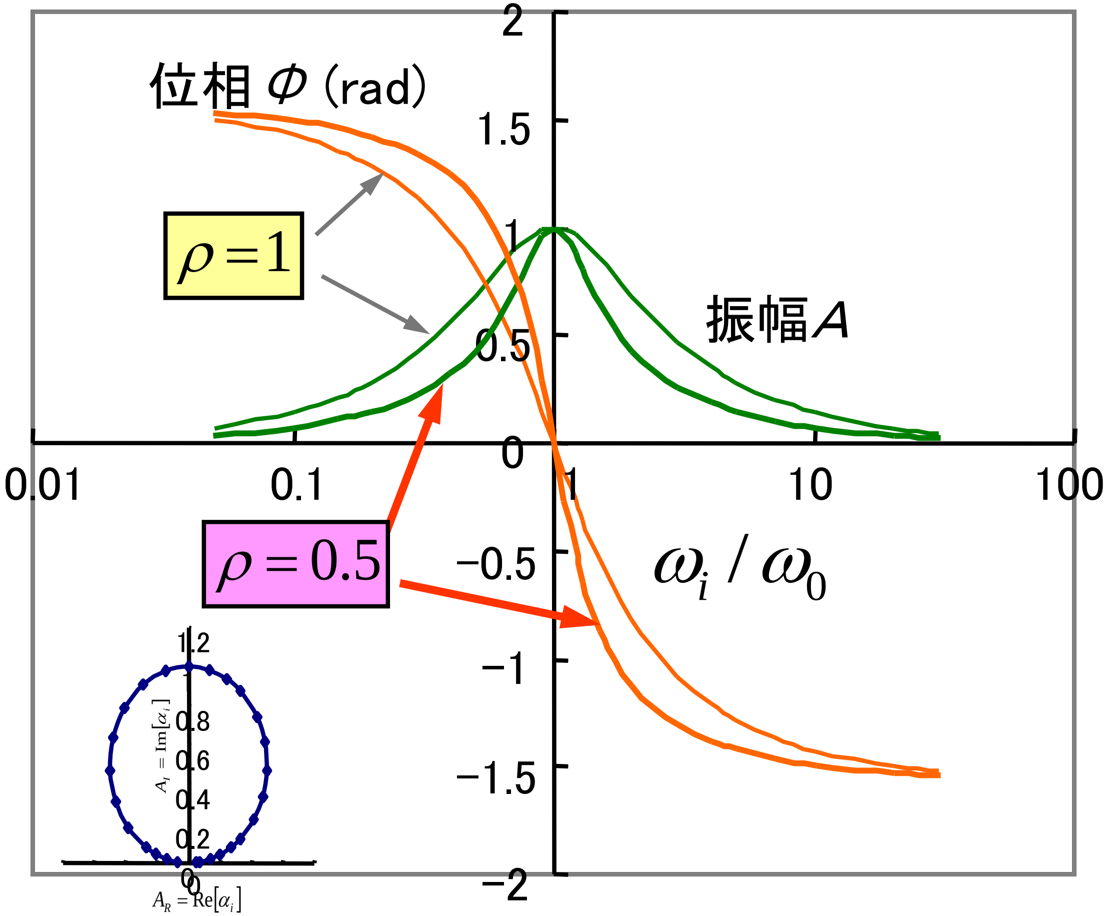
LC共振角周波数を中心とした振幅単峰特性

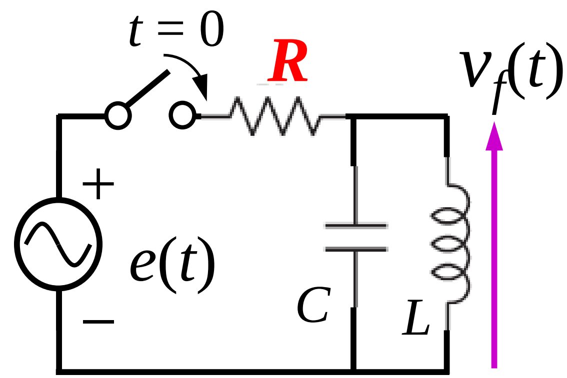
位相は+90° から -90° まで回転する

図1の回路の定常応答の角周波数特性(2-2)

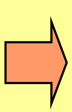
さらにρの絶対値を小さくする(Rを大きくする)と、

$$\rho = \frac{1}{2RC}$$





R が大きくなると、
共振角周波数付近の振幅減衰がより急峻となり、位相回転も急峻になる

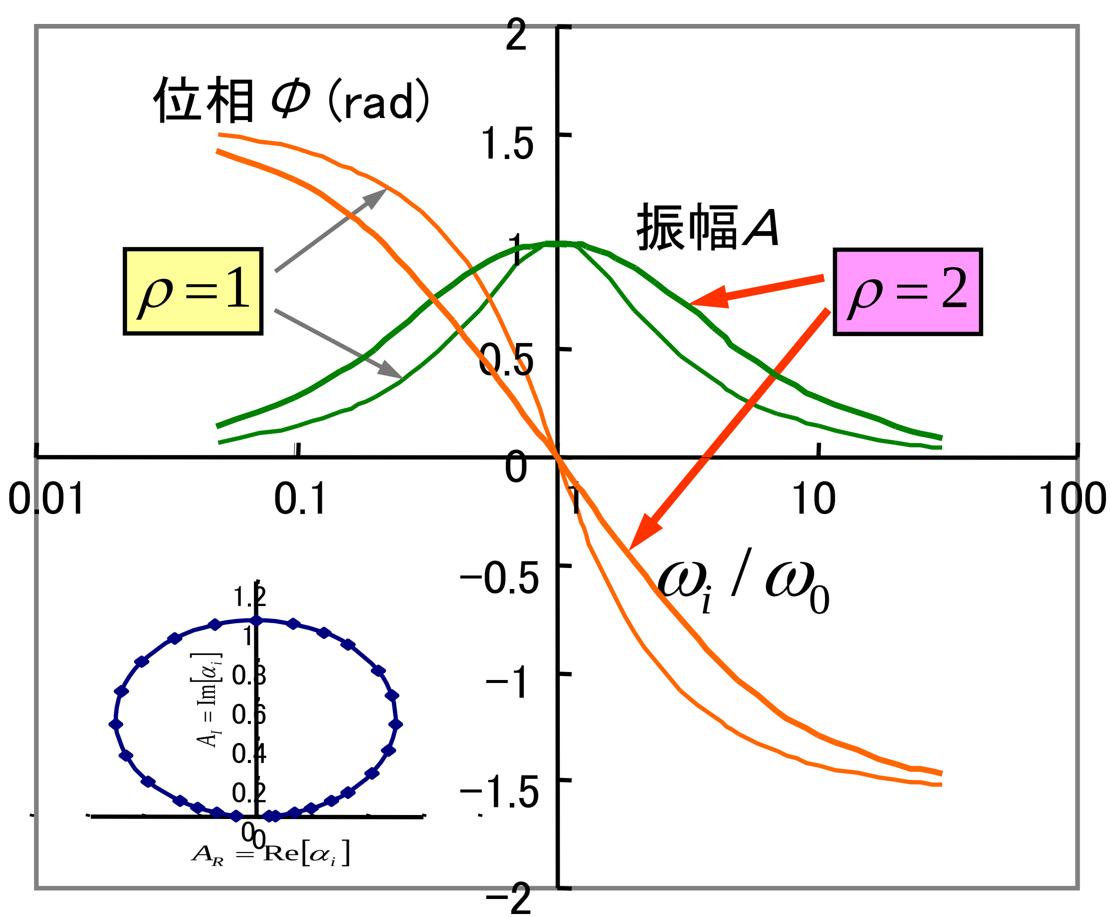


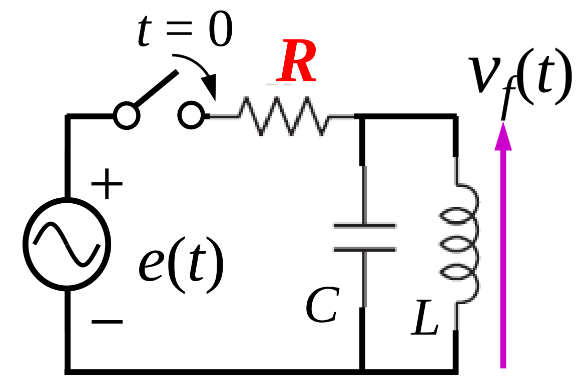
リアクタンス素子の影響が支配的に

図1の回路の定常応答の角周波数特性(2-3)

逆にρの絶対値を大きくする(Rを小さくする)と、

$$\rho = \frac{1}{2RC}$$





R が小さくなると、
共振角周波数付近の振幅減衰が緩和され、位相回転もゆるやかになる

⇒ リアクタンス素子の影響が小さくなる

回路網関数と応答のまとめ

複数の素子からなる回路の伝達関数 $H(s)$ は、回路素子の**駆動点関数**の合成として計算できる（前回の演習）

伝達関数から、
(1) **回路固有応答（過渡応答）**（2) **入力信号による強制応答（定常応答）**
の双方を求めることができる

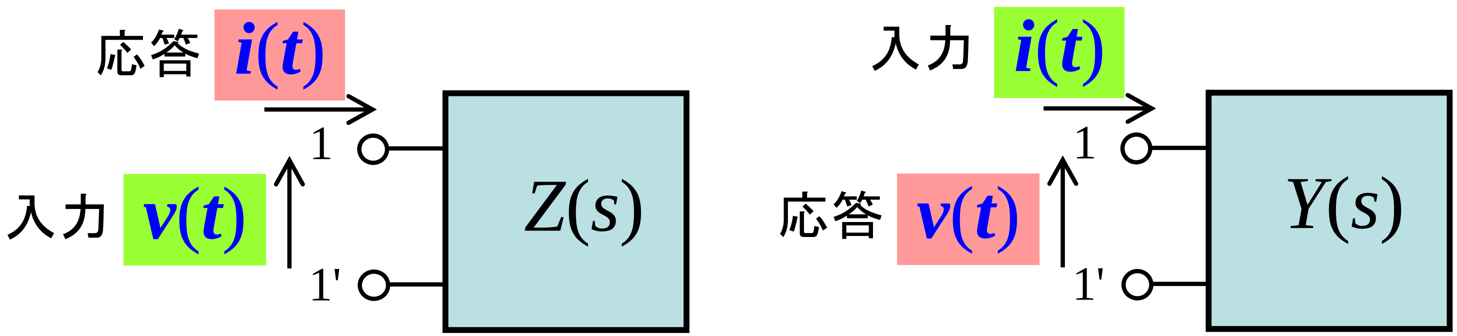
回路固有の応答（過渡応答）は**伝達関数の極（分母の根）**で決定される

正弦波入力信号による**強制応答（定常応答）**は、伝達関数において
$s = j\omega$とおいた結果に等しい

2ポート回路の行列表示（1）

1ポート回路と駆動点関数（第5回の講義より）

1ポート回路の端子に電圧や電流が入力された場合、その回路の応答は入力電圧に対する電流、または入力電流に対する電圧である



それぞれのラプラス変換を $V(s)$, $I(s)$ とおくと、

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} \qquad V(s) = \frac{I(s)}{Y(s)}$$

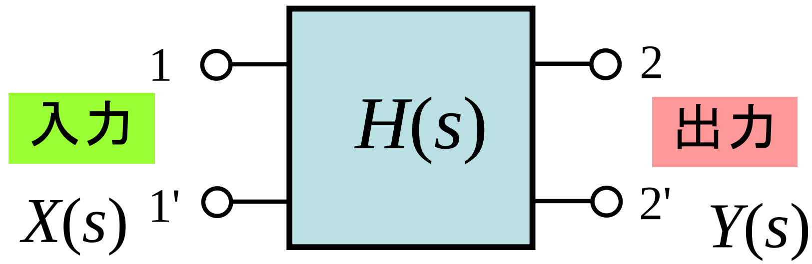
なる $Z(s)$ を入力インピーダンスまたは駆動点インピーダンス,
$Y(s)$ を入力アドミタンスまたは駆動点アドミタンスといい、
両者を総称して、**駆動点イミタンス**、または**駆動点関数**という

2ポート回路と伝達関数（第5回の講義より）

2ポート回路では入力ポートと出力ポートが分離している

その回路の応答は、一般に入力のラプラス変換を $X(s)$、出力のラプラス変換を $Y(s)$ として、

$$Y(s) = H(s)X(s)$$



と書ける。ここで、入力、出力がそれぞれ

（1）入力：電圧、　出力：電流　の場合、 $H(s)$ は **伝達アドミタンス**

（2）入力：電流、　出力：電圧　の場合、 $H(s)$ は **伝達インピーダンス**

（3）入力／出力ともに電圧　の場合、　$H(s)$ は **電圧伝達関数**

（3）入力／出力ともに電流　の場合、　$H(s)$ は **電流伝達関数**

以上を総称して **伝達関数** という

回路網関数

回路網関数における駆動点関数、伝達関数は、入力、出力でカテゴリー別けされていた

から＼へ	入力(ポート1)	出力(ポート2)
入力(ポート1)	駆動点関数	伝達関数
出力(ポート2)	伝達関数	

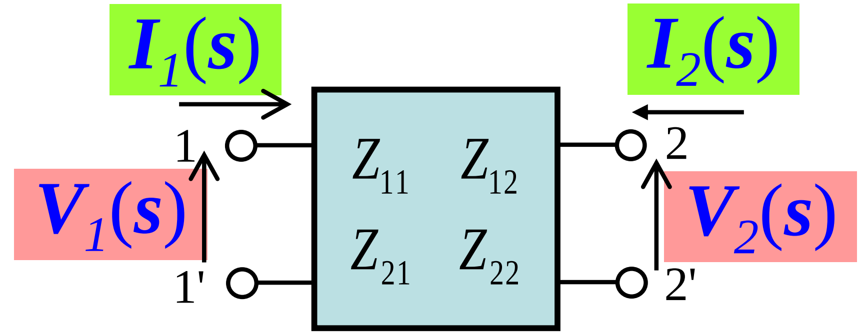
2ポート回路の行列表示とは

2ポート回路の電圧、電流の回路網関数における関係を、
より一般化して行列表示したもの

から＼へ	ポート1	ポート2
ポート1	行列表示 **インピーダンス行列　アドミタンス行列** **縦続行列　ハイブリッド行列** **散乱行列** →　目的により適当な行列を使い分け	
ポート2		

インピーダンス行列（Z行列）

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned}\right\}$$



入力ポート　　出力ポート

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Zパラメータ

$$V = ZI \qquad Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0},\quad Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

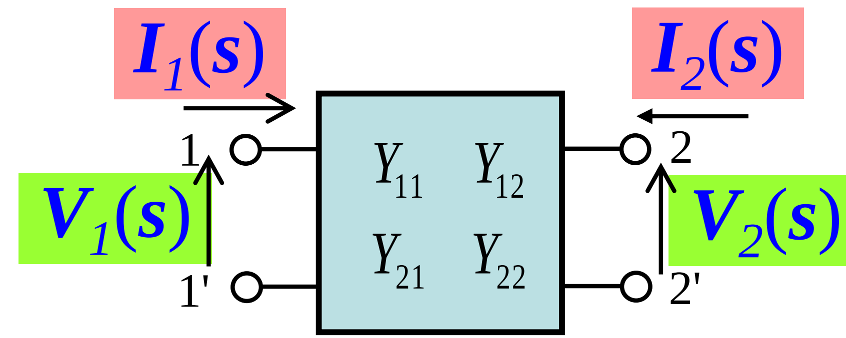
端子開放駆動点インピーダンス

$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0},\quad Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

端子開放伝達インピーダンス

アドミタンス行列（Y行列）

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{aligned}\right\}$$



入力ポート　　出力ポート

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Yパラメータ

$$I = YV \qquad Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0}, \quad Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

端子短絡駆動点アドミタンス

$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0}, \quad Y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}$$

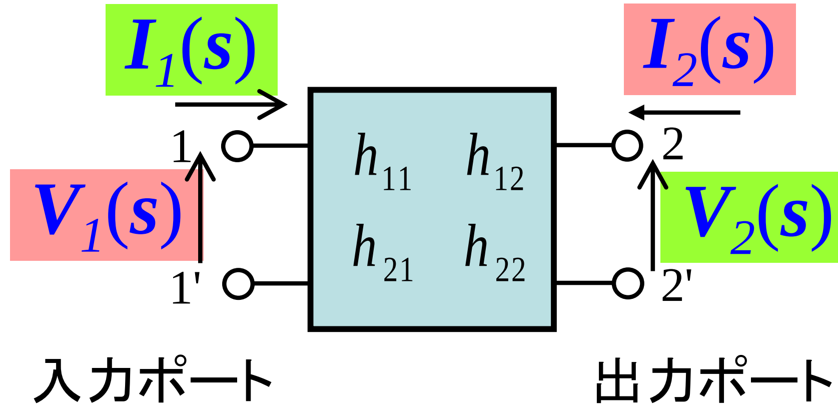
端子短絡伝達アドミタンス

ハイブリッド行列（H行列）

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

hパラメータ



$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0}, \quad h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0}$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0}, \quad h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0}$$

h_{11}： 出力短絡入力インピーダンス

h_{12}： 入力開放電圧帰還比

h_{21}： 出力短絡電流伝達関数

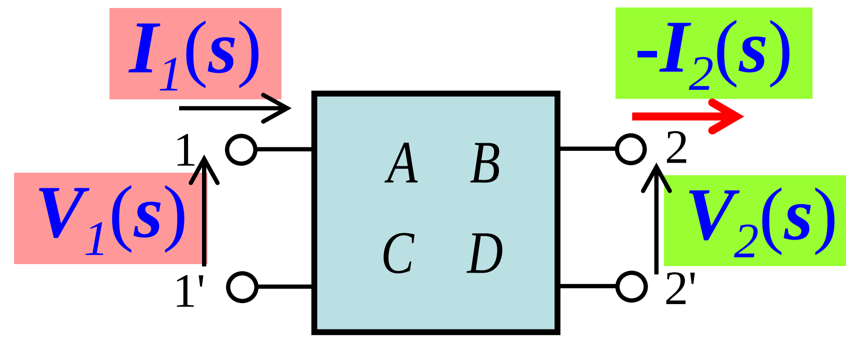
h_{22}： 入力開放出力アドミタンス

縦続行列（F行列）

$$
\left.
\begin{aligned}
V_1 &= AV_2 + B(-I_2) \\
I_1 &= CV_2 + D(-I_2)
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}
$$

Fパラメータ



入力ポート　　出力ポート

$$
F = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}
$$

$$
A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{-I_2=0}, \quad B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0}
$$

$$
C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{-I_2=0}, \quad D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0}
$$

A：出力開放電圧帰還比

B：出力短絡伝達インピーダンス

C：出力開放伝達アドミタンス

D：出力短絡電流帰還比